群论中的逆同态与逆同构

张隆辉,赵凤鸣

(四川职业技术学院,四川 遂宁 629000)

摘要:研究了群论中逆同态(逆同构)的一些基本性质,得到了群论中同态(同构)和逆同态(逆同构)的相互关系,并用逆同态(逆同构)的方法证明了群论中的同态基本定理和群的同构定理.

关键词:群;逆同态;逆同构

中图分类号:0152 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-2094(2014)01-0138-03

逆同态也称为反同态,它是使运算反序的映射.文献[1]研究了群胚到群胚的逆同态,文献[2-8]研究了群论中的逆同态,文献[9-11]研究了环论中的逆同态,取得了许多和同态类似的结果. 这表明逆同态是代数学的重要概念,它为代数系统的研究提供了又一途径.本文进一步给出关于群论中逆同态的一些结果,然后给出群论中若干同态定理的逆同态证明.

1 概念及引理

定义1 设f是群G到群$\overline{G}$的一个映射.如果$\forall x,y\in G$,都有$f(xy)=f(y)f(x)$,则称f是群G到群$\overline{G}$的一个逆同态(映射),或简称f是一个逆同态.

定义2 设f是群G到群$\overline{G}$的逆同态.如果f是单射,则称f是单逆同态;如果f是满射,则称f是满逆同态,或称G在f下逆同态于$\overline{G}$,记为$G\overset{f}{\sim}{}'\overline{G}$,或简记为$G\sim'\overline{G}$;如果$f$是双射,则称$f$是逆同构,或称$G$在下$f$逆同构于$\overline{G}$,记$G\overset{f}{\cong}{}'\overline{G}$,或简记为$G\cong'\overline{G}$.

引理1[3] 设f是群G到群$\overline{G}$的逆同态,$H\leqslant G$,$\overline{H}\leqslant\overline{G}$,则

(1)$f(H)\leqslant\overline{G}$;　　(2)$f^{-1}(\overline{H})\leqslant G$;

(3)若$H\trianglelefteq G$,则$f(H)\trianglelefteq\overline{G}$;

(4)若$\overline{H}\trianglelefteq\overline{G}$,则$f^{-1}(\overline{H})\trianglelefteq G$.

引理2[3] 设f是群G到群$\overline{G}$的满逆同态,$\overline{H}\trianglelefteq\overline{G}$,则$G/f^{-1}(\overline{H})\cong'\overline{G}/\overline{H}$.

引理3[3] 设G是群,$H\leq G,K\trianglelefteq G$,则$HK/K\cong' H/H\cap K$

此引理是文[3]定理7的改进,即将条件"$H,K\trianglelefteq G$"削弱为"$H\leq G,K\trianglelefteq G$",因为此时仍有$K\trianglelefteq HK\leq G$,$H\cap K\trianglelefteq H$,故不影响结论.

2 主要结果

定理1 设f是群G到群$\overline{G}$的逆同态,e和$\overline{e}$分别是G和$\overline{G}$的单位元,则

$$f(e)=\overline{e},\quad f(x^{-1})=f(x)^{-1}(\forall x\in G).$$

证明:因$\{e\}\leqslant G$,由引理1(1)有$\{f(e)\}\leqslant\overline{G}$,故$\{f(e)\}$与$\overline{G}$有相同的单位元$\overline{e}$,从而$f(e)=\overline{e}$.又$(\forall x\in G)$,有

$$f(x^{-1})f(x)=f(xx^{-1})=f(e)=\overline{e},$$

故$f(x^{-1})=f(x)^{-1}$.

定理2 设f是群G到群$\overline{G}$的满逆同态,$\ker f\subseteq H\trianglelefteq G$,则$G/H\cong'\overline{G}/f(H)$.

证明:由引理1(3)有$f(H)\trianglelefteq\overline{G}$. $\forall x\in G$,令$f^*(xH)=f(x)f(H)$.由于f是群G到群$\overline{G}$的满逆同态,则显然f^*是G/H到$\overline{G}/f(H)$的满射.又如果$f^*(xH)=f^*(yH)$ $(x,y\in G)$,则$f(x)f(H)=f(y)f(H)$,故

$$f(y)^{-1}f(x)f(H)=\overline{e}f(H),$$

其中$\overline{e}$是$\overline{G}$的单位元,从而由定理1有

$$f(y)^{-1}f(x)=f(y^{-1})f(x)=f(xy^{-1})\in f(H).$$

令$f(xy^{-1})=f(h)$ $(h\in H)$,则

$$f(xy^{-1}h^{-1})=f(h^{-1})f(xy^{-1})=f(h)^{-1}f(xy^{-1})=\overline{e},$$

从而$xy^{-1}h^{-1}\in\ker f\subseteq H$,所以$xy^{-1}\in H$,而$H$是$G$的正规子群,故$xH=yH$,$f^*$是$G/H$到$\overline{G}/f(H)$的单射,从而是双射.又$\forall x,y\in G$,有

收稿日期:2013-12-28
基金项目:四川省教育厅自然科学重点项目(11ZA263, 11ZA264)
作者简介:张隆辉(1963-),男,四川隆昌人,四川职业技术学院学报编辑部副教授.研究方向:抽象代数.
赵凤鸣(1982-),女,四川阆中人,四川职业技术学院应用数学与经济系讲师,硕士.

$$f^*(xHyH)\ f^*(xyH)=f(xy)f(H)=f(y)f(x)f(H)$$
$$=f(y)f(H)f(x)f(H)=f^*(yH)f^*(xH),$$

故f^*是逆同构,即 $G/H\cong'\overline{G}/f(H)$.

定理 3 设f是群 G 到群$\overline{G}$的映射,定义$f_{-1}(x)=f(x)^{-1}=(\forall x\in G$, (1)若$f$是同态则$f_{-1}$是逆同态(2)若$f$是逆同态,则$f_{-1}$是同态.

证明:显然f_{-1}是群 G 到群$\overline{G}$的映射.

(1)若f是同态,则 $\forall x,y\in G$有

$$f_{-1}(xy)=f(xy)^{-1}=(f(x)f(y))^{-1}$$
$$=f(y)^{-1}f(x)^{-1}=f_{-1}(y)f_{-1}(x).$$

(2)若f是逆同态,则 $\forall x,y\in G$ 有

$$f_{-1}(xy)=f(xy)^{-1}=f((xy)^{-1})=f(y^{-1}x^{-1})$$
$$=f(x^{-1})f(y^{-1})=f(x)^{-1}f(y)^{-1}=f_{-1}(x)f_{-1}(y).$$

定理 4设f是群 G 到群$\overline{G}$的映射,定义$f_{-1}(x)=f(x)^{-1}$ $(\forall x\in G)$,(1)若f是单同态(满同态,同构),则f_{-1}是单逆同态(满逆同态,逆同构);(2)若f是单逆同态(满逆同态,逆同构),则f_{-1}是单同态(满同态,同构).

证明:

(1)因f是同态,则 由定理 3,f_{-1}是逆同态.

(i)如果f是单同态,若$f_{-1}(x)=f_{-1}(y)$ $(x,y\in G)$,则$f(x)^{-1}=f(y)^{-1}$,$f(x)=f(y)$,$x=y$,故f_{-1}是单射,从而是单逆同态. (ii)如果f是满同态,$\overline{x}\in\overline{G}$,则存在$x\in G$,使$f(x)=\overline{x}$,从而由$f_{-1}$是逆同态及定理 1 有

$$\overline{x}=(f(x)^{-1})^{-1}=f_{-1}(x)^{-1}=f_{-1}(x^{-1}),x^{-1}\in G,$$

故f_{-1}是满逆同态. (iii)如f果是同构,由(i)、(ii)知f_{-1}是逆同构.

(2)因f是逆同态,由定理 3,f_{-1}是同态.

如果是f单逆同态、满逆同态、逆同构,类似于(1)的(i)、(ii)、(iii)得f_{-1}是单同态、满同态、同构.

3同态定理的逆同态证明举例

例 1 (同态基本定理[12]96)设φ是群 G 到群$\overline{G}$的一个同态满射,则$N=\ker\varphi\trianglelefteq G$,且

$$G/N\cong\overline{G}.$$

证明:定义 $\varphi_{-1}(x)=\varphi(x)^{-1}(\forall x\in G)$,设$\overline{e}$是$\overline{G}$的单位元,$\forall x\in\ker\varphi$,有 $\varphi(x)=\overline{e}$,故$\varphi_{-1}(x)=\varphi(x)^{-1}=\overline{e}^{-1}=\overline{e}$,所以$x\in\ker\varphi_{-1}$;反之,$\forall x\in\ker\varphi_{-1}$,有 $\varphi_{-1}(x)=\overline{e}$,故

$$\varphi(x)=(\varphi(x)^{-1})^{-1}=\varphi_{-1}(x)^{-1}=\overline{e}^{-1}=\overline{e},$$

所以 $x\in\ker\varphi$,从而 $N=\overline{e}\text{er}\,\varphi=\ker\varphi_{-1}=\varphi_{-1}^{-1}(\overline{e})$,而 $\{\overline{e}\}\trianglelefteq G$,由引理 1(4)得

$$N=\ker\varphi\trianglelefteq G.$$

因为φ_{-1}是 G 到$\overline{G}$的一个满逆同态,由引理 2 得 $G/\varphi_{-1}^{-1}(\overline{e})\cong'\overline{G}/\{\overline{e}\}$,即 $G/N\cong'\overline{G}$,则存在 G/H 到$\overline{G}$的一个逆同构f,令$f_{-1}(xN)=f(xN)^{-1}$,由定理 3,f_{-1}是 G/H 到$\overline{G}$的一个同构,故 $G/N\cong\overline{G}$.

例 2 (第一同构定理[12]100)设φ是群 G 到群$\overline{G}$的一个同态满射,又$\ker\varphi\subseteq N\trianglelefteq G$,$\overline{N}=\varphi(N)$,则$G/N\cong\overline{G}/\overline{N}$.

证明:令$\varphi_{-1}(x)=\varphi(x)^{-1}(\forall x\in G)$,则$\varphi_{-1}$是$G$ 到$\overline{G}$的一个满逆同态,由定理 2 有 $G/N\cong'\overline{G}/\varphi_{-1}(N)$. $\forall\overline{x}\in\varphi(N)$,存在$x\in N$,使 $\overline{x}=\varphi(x)=\varphi_{-1}(x)^{-1}=\varphi_{-1}(x^{-1})\in\varphi_{-1}(N)$;$\forall\overline{x}\equiv\varphi_{-1}(N)$,存在$x\in N$,使 $\overline{x}\ \varphi_{-1}(x)=\varphi(x)^{-1}=\varphi(x^{-1})\in\varphi(N)$,故$\overline{N}=\varphi(N)=\varphi_{-1}(N)$,从而 $G/N\cong'\overline{G}/\overline{N}$. 设$f$是 G/N 到$\overline{G}/\overline{N}$的逆同构,令$f_{-1}(xN)=f(xN)^{-1}$ $(\forall x\in G)$,则f是 G/N 到$\overline{G}/\overline{N}$的同构,故 $G/N\cong\overline{G}/\overline{N}$.

例 3 (第二同构定理[12]102)设 G 是群,又 $H\leqslant G$, $N\trianglelefteq G$,则 $H\cap N\trianglelefteq H$,并且 $HN/N\cong H/H\cap N$.

证明:前一结论证明略. 至于后一结论,由引理 3 有 $HN/N\cong'H/H\cap N$, 设f是 HN/N 到 $H/H\cap N$的逆同构,令$f_{-1}(xN)=f(xN)^{-1}(\forall x\in HN)$,则$f$是 HN/N 到 $H/H\cap N$的同构,从而结论成立.

参考文献:

[1]廖辉,李凤清,张青山. 群胚到群胚的逆同态[J]. 四川职业技术学院学报,2012, 22(2).
[2]任祯琴,张 良,郭继东. 群上的逆同态[J]. 伊犁师范学院学报(自然科学版),2009, (12).
[3]申志荣. 群论中的反同态和反同构[J]. 宁夏大学学报(自然科学版),1987, (3).
[4] 李月芬. 群的反同态与反同构的性质[J]. 内蒙古师太学报自然科学(汉文)版, 1998, (1).
[5]李月芬,赵英. 反商群与反同态[J]. 包头钢铁学院学报, 1998, (4).
[6] 班桂宁. 关于群的弱同态[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 1998, (3).
[7] 韦华全, 刘秀, 黄杰山. 广义同态与算子群[J]. 大学数学, 2010, (4).
[8] 刘秀, 韦华全,黄杰山. 有关广义自同构群的一些结论[J]. 广西师范学院学报(自然科学版), 2007, (3).
[9]王春艳,李立. 环反同态保持的几个重要性质[J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报, 2010, (2).

[10] 王春艳. 环的反同态性质的研究[J]. 齐齐哈尔大学学报, 2010, (2).
[11]李立,魏连锁. 反同态与反商环[J]. 哈尔滨商业大学学报(自然科学版), 2010, (5).
[12] 杨子胥. 近世代数(第二版)[M]. 北京:高等教育出版社, 2003.

The Anti-homeomorphism and the Anti-isomorphism in Group Theory

ZHANG Longhui, ZHAO Fengming
(Sichuan Vocational and Technical College, Suining Sichuan 629000)

Abstract: In this paper, some basic properties are researched of anti-homeomorphism (anti-isomorphism) in group theory, the relationship of group homeomorphism (isomorphism) and anti-homeomorphism (anti-isomorphism) are proved, uses the anti-homeomorphism (anti-isomorphism) methods to prove the fundamental theorem of homeomorphism and isomorphism theorems of group in group theory.

Keywords: Group; File Management; Anti-homeomorphism; Anti-isomorphism

责任编辑:张隆辉

(上接第128页)

Problems and Countermeasures of Imitative Training in Accounting Computerization in Higher Vocational Colleges

CHEN Ke, TU Liping
(Department of Business Administration, Chengdu Technological University, Chengdu Sichuan 611730)

Abstract: This paper analyses problems with the imitative training for computerized accounting in vocational college, like teaching content, teaching software, teaching environment, teachers and college enterprise cooperation. It put forward some countermeasures, such as strengthening teaching content, rationally allocate teaching software, improve teaching simulation, and strengthen college enterprise cooperation.

Keywords: Higher Vocational College; Accounting Computerization; Imitative Training

责任编辑:张隆辉